Implication (logique)

En logique mathématique, l'**implication** est l'un des connecteurs binaires du langage du calcul des propositions, généralement représenté par le symbole « ⇒ » et se lisant « seulement si » ou, de façon équivalente, « si …, alors … » comme dans la phrase « s'il pleut, alors mon gazon est arrosé »[1].

L'implication admet des interprétations différentes selon les différents systèmes logiques (logique classique, modale, intuitionniste etc...).

Étant un connecteur, qui produit une proposition à partir de deux autres, et qui est interprété par une opération sur les propositions ou sur les valeurs de vérités, l'implication n'est pas la déduction qui est une *relation* entre propositions.

Les logiciens utilisent couramment pour l'implication la flèche simple « → », et encore parfois le symbole « ⊃ » introduit par Peano.

Définition

Classiquement, le connecteur d'implication est formalisé de deux façons[2], soit en termes de valeurs de vérité, soit en termes de déduction.

Dans le premier cas il s'agit de donner une valeur de vérité à toute proposition. En logique formelle, pour chaque connecteur la valeur de vérité du résultat dépend uniquement de celles des opérandes, c'est-à-dire que la valeur de vérité de $p \Rightarrow q$ ne dépend que de celles de p et q. Par exemple il n'est pas question de rendre compte d'un lien de causalité, qui indiquerait comment la vérité de q découle de celle de p. On définit donc l'implication en l'interprétant par une *fonction de vérité*. Cette approche est la plus courante, car en fait la plus familière des logiques, la logique classique, n'a que 2 valeurs de vérité, le vrai et le faux. Elle peut prendre dans d'autres logiques des formes différentes mais analogues dans la démarche, comme la sémantique de Kripke qui permet d'interpréter les logiques modales et la logique intuitionniste (cette sémantique de la logique intuitionniste traduite en termes de valeurs de vérité, en aurait nécessairement une infinité).

Dans le second cas, si on se place dans le cadre d'un système formel de règles de déduction et d'axiomes, il est souvent possible de distinguer des règles ou des axiomes particuliers associés à ce connecteur.

Ces deux approches sont compatibles et sont reliées par des théorèmes comme le théorème de complétude pour la logique classique, ou le Théorème de complétude du calcul des propositions pour le calcul des propositions, à titre d'exemple.

Logique classique

La logique classique n'a que 2 valeurs de vérité, « vrai » et « faux », que l'on représente par 1 et 0. Le connecteur « ⇒ » s'interprète alors par une application de l'ensemble $\{0,1\}^2$ sur $\{0,1\}$, soit une opération booléenne :

Table de vérité de l'implication

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
p* ⇒ *q	1	0	1	1

Ainsi, $p \Rightarrow q$ est fausse exactement lorsque p est vraie et q fausse, raison pour laquelle $p \Rightarrow q$ peut se lire « p seulement si q ».

Propriétés

Sous forme implicative

Les formules suivantes, constituées seulement de l'implication et de littéraux, sont des tautologies [3] :

$p \Rightarrow p$

p a toujours la même valeur de vérité que p, donc cette implication est correcte. Elle est liée à la réflexivité de la déduction en logique classique.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Si p est vrai, $q \Rightarrow p$ est vrai aussi (c'est un des dits paradoxes de l'implication matérielle (en).)

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Cette formule est liée à la transitivité de la relation de déduction ; elle est équivalente à la tautologie $[(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ par exportation (en).

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (((p \Rightarrow r) \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

Cette formule est une formulation sous forme purement implicative du fait qu'en logique des prédicat si $p \Rightarrow (q)$ et si $\neg p \Rightarrow (q)$ alors q est vraie dans tous les cas.

$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Cette tautologie conduit (par Modus Ponens) au raisonnement par l'absurde en logique classique.

$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Cette tautologie conduit (toujours par Modus Ponens) au principe d'explosion (en).

Sous forme composée d'autres connecteurs

« $p \Rightarrow q$ » équivaut à « $\neg(p \land \neg q)$ » ainsi qu'à « $(\neg p) \lor q$ ».

Ces deux formules pourraient être prises comme des définitions de l'implication. Essentiellement elles décrivent la table de vérité, la première donne le seul cas où « $p \Rightarrow q$ » est fausse, la seconde les cas où « $p \Rightarrow q$ » est vraie.

« $p \Rightarrow q$ » équivaut à « $\neg q \Rightarrow \neg p$ ».

Ces deux formules sont dites *contraposées*.

« $p \Rightarrow (q \land r)$ » équivaut à « $(p \Rightarrow q) \land (p \Rightarrow r)$ » et « $p \Rightarrow (q \lor r)$ » à « $(p \Rightarrow q) \lor (p \Rightarrow r)$ ».

Distributivité *à gauche* de l'implication par rapport à la conjonction et à la disjonction

« $(p \land q) \Rightarrow r$ » équivaut à « $(p \Rightarrow r) \lor (q \Rightarrow r)$ » et « $(p \lor q) \Rightarrow r$ » à « $(p \Rightarrow r) \land (q \Rightarrow r)$ ».

En revanche elle n'est distributive à droite ni par rapport à la conjonction ni par rapport à la disjonction : si le « $\Rightarrow$ » est à droite, dans l'expression développée le « $\land$ » se transforme en « $\lor$ » et vice-versa [4].

Non associativité.

L'implication n'est pas associative, car « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ » et « $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ » ne prennent pas les mêmes valeurs pour toutes les distributions de valeurs de vérité, on s'en convaincra en donnant la valeur 0 à « p » et à « r » : la première expression vaut 0 et la seconde vaut 1.

Implication et déduction

L'implication (correspondant au « si ..., alors ... »), qui est un connecteur, se distingue de la relation de déduction (marquée par exemple par le mot « donc »). Cependant, le connecteur implication et la relation de déduction sont étroitement liées par les deux règles suivantes :

- Le modus ponens est la règle de déduction qui indique comment s'utilise une implication dans une démonstration ; elle s'énonce ainsi : de p et de $p \Rightarrow q$ on déduit q[5].
- Le lemme de déduction indique comment l'on démontre une implication : si de p on déduit q, alors on en déduit $p \Rightarrow q$[réf. souhaitée].

Ces règles sont les deux règles fondamentales qui gouvernent l'implication. Adaptées à la déduction naturelle (il faut les préciser en indiquant en particulier le contexte des hypothèses), elles deviennent *règle d'élimination* (modus ponens) et *règle d'introduction* (lemme de déduction) de l'implication[6].

Ces deux règles sont suffisantes pour l'implication en logique intuitionniste. En logique classique il faut ajouter une forme de raisonnement par l'absurde. Par exemple il suffit d'ajouter comme axiome logique la loi de Peirce $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$, qui est purement implicationnelle.

Logique intutionniste

Dans le cadre de l'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov, qui est une interprétation en termes de preuves, une preuve de $A \Rightarrow B$ est vue comme un procédé, une fonction en un sens effectif, qui transforme une preuve de A en une preuve de B. La réalisabilité est une contrepartie formelle de cette sémantique informelle.

En sémantique de Kripke, qui est une sémantique traditionnelle en termes de mondes possibles, avec une relation d'accessibilité qui dans le cas de la logique intutionniste est sans cycle, on a $A \Rightarrow B$ dans le monde m quand, à chaque fois que l'on a A dans un monde accessible à partir de m, on a aussi B.

Logiques modales

Les logiques modales sont des extensions de la logique classique, et l'implication y possède alors la même interprétation. Cependant les opérateurs modaux permettent de définir des formes plus fortes de l'implication.

Historique et applications de l'implication

L'implication était connue dès la Grèce antique, notamment par les stoïciens sous une forme telle que : « Du vrai suit le vrai... Du faux suit le faux... Du faux suit le vrai... Mais du vrai, le faux ne peut s'ensuivre »[7]. Ceci correspond à l' « implication matérielle », qui fut redécouverte par Frege en 1879 et Peirce en 1885. La pertinence de l'interprétation matérielle fut débattue tant dans l'Antiquité classique que dans la période contemporaine [8]

Dans les exemples tirés du langage courant, tels que « si 1=2, je suis le Pape », où cette implication produit des énoncés volontairement saugrenus mais vrais, les énoncés portent sur des objets fixés ; il n'en va pas de même en mathématiques, où les énoncés contiennent des variables x, y, m, n etc...

Il s'ensuit que l'usage de l'implication par les mathématiciens diffère de celui donné par ces exemples. Ainsi, un mathématicien considèrera comme faux l'énoncé :

si n est divisible par 7, alors n est impair

En effet, il ne s'agit pas d'une simple implication matérielle ; l'expression telle quelle n'est pas une fonction de vérité, elle est vraie pour n=21, et fausse pour n=28 ; elle n'a de sens qu'accompagnée d'un quantificateur, ici le quantificateur (universel) est sous-entendu [9].

Notes et références

Ouvrages

- René Cori et Daniel Lascar, Logique mathématique I. Calcul propositionnel, algèbres de Boole, calcul des prédicats [détail des éditions]

[1] La conjonction « alors » peut être omise, par exemple on peut dire « s'il pleut, mon gazon est arrosé ».

[2] Une troisième façon peut se faire via la correspondance de Curry-Howard comme le type des fonctions qui transforment une démonstration du premier argument en un démonstration du second argument.

[3] chap. 1, §2.11 p. 43

[4] op. cit. p. 44

[5] chap. 4, §1.1 p. 229

[6] Voir également une autre présentation de la déduction naturelle.

[7] Diogène Laërce, *Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres*, livre VII, 83

[8] Willard Van Orman Quine, *Methods of Logic*, Holt, Rinchart & Winston, Inc. 1972, trad. fr. par Maurice Clavelin *méthodes de logique*, Armand Colin, Paris 1973, chap. 3, pp. 32-33

[9] chap. 1, 2.1 p.32

Autres citations

Sources et contributeurs de l’article

Implication (logique) *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=99570803 *Contributeurs*: 16@r, ADM, Ahbon?, Alno, Anne Bauval, Arnaudus, Badmood, Boris Christ, Briling, COLETTE, Camion, Caton, Cbigorgne, Cdang, De-passage, Dhatier, Ellisllk, Epsilon0, Eusebius, Fafnir, Foudebassans, Freddy Willy, GLec, Gilles.L, Grum, Guernica, Guychou, HYUK3, Helgismidh, Hibou57, Jean-Christophe BENOIST, Jerome66, Jrcourtois, Jyp, Katanga, Lydie Noria, Lylvic, Marc Mongenet, Med, Michel421, Mnr42, Neitsa, Nguyenld, Néfertari, Orthogaffe, PIerre.Lescanne, Papydenis, Pichasso, Poulpy, Proz, RM77, Richardbl, SGC.Alex, Spooky, Sylvain Theulle, Tejgad, Theon, TomT0m, Vincent.vaquin, Zawer, 28 modifications anonymes

Licence