# LOGIQUE CLASSIQUE ET THEORIE NAIVE DES ENSEMBLES

## TABLE DES MATIERES

**INTRODUCTION**

*La logique* étudie le raisonnement. Elle veut indiquer comment, de faits et de jugements qui sont donnés par ailleurs, on peut tirer valablement d'autres jugements, par le seul raisonnement, et déterminer comment discerner des raisonnements non valables.

Termes constants : objets fixes bien déterminés

Ex : 14 ; Bruxelles ; Mozart ; $\phi$ = l'ensemble vide

Termes variables : ne désignent aucun objet déterminé

Ex : y-z ; le père de …

les valeurs d'une variable sont les constantes que l'on substitue à cette variable.

Propositions : Expressions énonçant un fait qui peut être V ou F

Il n'existe pas d'intermédiaire (principe du tiers exclus)

Ex : 18 est un nombre entier
L'addition dans est 3 commutative
7 est un nombre pair

On les désignera par des lettres p, q, …

Une proposition est un énoncé abstrait sur lequel on ne fait aucune hypothèse a priori sur la véracité ou la fausseté.
Il s'agit ainsi de la brique fondatrice de la science de la logique, au même titre que le point est l'objet de base de la géométrie ou le nombre celui de l'arithmétique.
Une proposition est donc davantage qu'une simple phrase, mais une phrase n'est pas non plus nécessairement le reflet, fut-il imparfait, d'une proposition. Pour que ce soit le cas., encore faut-il que les mots employés aient un sens clair et non ambigu, càd qu'ils ne fassent pas référence à des notions elles-mêmes mal définies.

Condition :

*Exemple* : x est un nombre réel supérieur à 5
Ce n'est PAS une proposition. Elle n'exprime pas un fait V ou F
Il existe une indéterminée :

- Si on remplace dans cette expression x par 7
  - On obtient une *proposition* V

- Si on remplace dans cette expression x par 3
  - On obtient une *proposition* F

*Exercice* (notion de proposition) :

Etudier la valeur de vérité des propositions suivantes

1) le réel 3 est positif
2) $x \in 5$
3) $x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
4) tout losange est un parallèlogramme
5) quelle est la t° de ce jour ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rép : | (1) | (3) | (4) | sont des propositions |
| | V | F | V | |

**QUANTIFICATEURS**

1° Quantificateur universel $\forall x$ signifie quelque soit x

Ex : dans 3 la proposition p :

$\forall x \in 3 : (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ est V

2° quantificateur existentiel $\exists x$ signifie il existe au moins un x tel que

$\exists x \in 3 : x^2 - 3x + 2 = 0$ En effet, x = 1 par *Exemple*

Une proposition peut-être :

**Universelle affirmative** : Tous **l**es naturels sont des réels

**Universelle négative :** Aucun nombre premier n'est un nombre pair

**Particulière affirmative** : Il existe des nombres réels qui sont des entiers négatifs

**Particulière négative** : Il existe des naturels qui ne sont pas des nombres pairs

*Exercices* :

1) Etudier la valeur de vérité des propositions (quantifiées) suivantes

$\exists x \in 3 : x + 3 = 4$
$\exists x \in 3 : x^2 \geq 0$
$\forall x \in 3 : x^2 \geq 0$
$\forall x \in 3 : \frac{3x + 1}{x-2} \in 3$

2) les deux quantificateurs ∀ et ∃ peuvent être utilisés dans une même condition MAIS l'ordre dans lequel ils sont présentés n'est pas indifférent.

*Exemples* :

| | |
|---|---|
| ∀x ∈ ∠ ∃ a ∈ ∠ : a ≥ x | **V** |

| | |
|---|---|
| ∃ a ∈ ∠ ∀x ∈ ∠ : a ≥ x | **F** |

3)

∀x ∈ 9     ∃ x'∈ 9 : x + x' = 0     *(1)*

∃o ∈ 9     ∀x ∈ 9 : 0 + = x = x + 0     *(2)*

*(1)* à tout élément 9 est associé un autre élément, SYMETRIQUE du premier pour l'addition dans 9 et cet autre élément ∈ aussi à 9.

*(2)* Il existe un élément ZERO qui associé à n'importe quel élément de 9 donne comme somme ce second élément.

**EQUATION – IDENTITE**

**1) Equation :**

C'est une <u>condition</u> qui a la forme d'une égalité entre deux termes

↓

∃ indéterminée(s)

*Exemple* :

1) $3x + y = x - 2y$
2) $(x + 4)(x - 2) = 0$

(1) et (2) ne sont ni V ni F aussi longtemps que l'on ne donne pas aux variables des valeurs numériques déterminées.

**2) Identité :**

C'est une <u>proposition</u> qui a la forme d'une égalité entre deux termes

*Exemple* :

∀a, b ∈ 3 : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**ALGEBRE DES ENSEMBLES**

Introduction:
Née d'une lente élaboration dans l'esprit des plus éminents mathématiciens, une idée étonante a germé puis s'est cristallisée et développée depuis la fin du $19^{\text{ième}}$ s sous le nom de théorie des ensembles.

Des liens étroits vont vite se tisser entre cette théorie et la logique

L'idée étonnante a été formalisée par Georg CANTOR
Quelle est-elle ?
Ce qui compte en mathématiques, c'est moins la nature des objets étudiés ( point/ droite/nombres/suites/fonctions/vecteurs /matrices) que les relations qui existent entre ces objets et les propriétés qu'ils vérifient.
Dès lors, l'attitude qui fut adoptée consite à étudier des STRUCTURES et des RELATIONS sur des ensembles d'objets, sans se préoccuper de la nature de ces objets, lesquels furent baptisés ELEMENTS de l'ensemble qu'ils forment.

Un ensemble peut être défini en nommant chacun de ses éléments (et dans certains cas n'est connu que par la donnée de chacun de ses éléments).C'est ce qu'on appelle la définition en EXTENSION.
Dans d'autres cas, une phrase suffit à définir un ensemble. C'est ce qu'on appelle la définition en COMPREHENSION .On se donne une propriété (dite caractéristique) que peut ou non satsfaire un OBJET x.
x sera élément de l'ensemble E(ou non) selon qu'il vérifie (ou non) la propriété.
On parle d'appartenance :
$x \in E$ $(x \notin E)$

NB : un ensemble doit être BIEN DEFINI (pas d'ambiguïté).

L'ensemble VIDE $\phi$ ne contient AUCUN élément
Ex : { mois de 26 jours }

**1. Egalité** :

Deux ensembles $E_1$ et $E_2$ sont égaux ssi
Chaque élément de $E_1$ est élément de $E_2$ et chaque élément de $E_2$ est élément de $E_1$

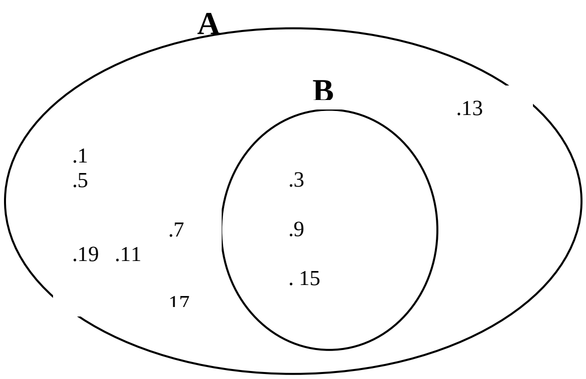
**2. Inclusion / Complémentaire :**

Ex : Soit A = {nombres impairs inférieurs à 20}
$\Rightarrow$ A = {1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

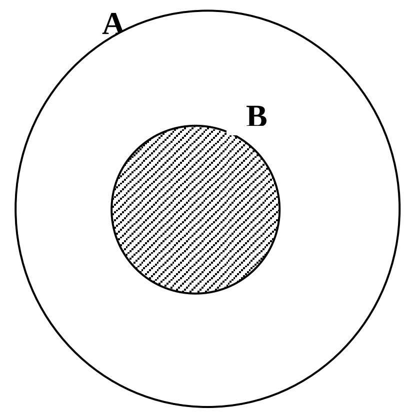
Soit B = {nombres impairs inférieurs à 20 et divisibles par 3}
$\Rightarrow$B = {3, 9, 15}

L’ensemble B est CONTENU dans l’ensemble A : $B \subset A$
(tous les éléments de B sont éléments de A)
Soit C : l’ensemble des éléments de A qui ne sont pas éléments de B :
C = {1, 5, 11, 13, 17, 19}
C’est le complémentaire de B par rapport à A (NB : A constituant ici un référentiel)

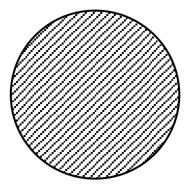
***Représentation par le diagramme de Venn***




Ensemble C




NB : $\phi$ = ensemble vide

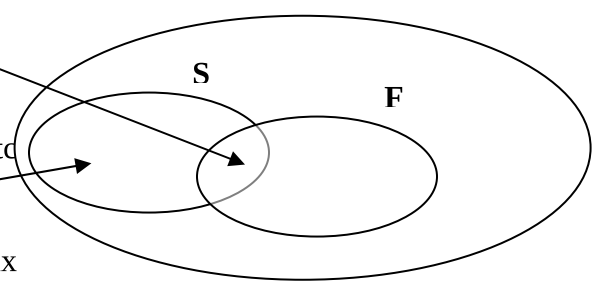


**3. Intersection et réunion :**

*EXERCICE 1 :*
Parmi les personnes étant dans l’assemblée on demande de :

lever la main gauche si on a un frère
lever la main droite si on a une sœur
NB : certains auront deux mains levées

On a : $\boxed{S \cap F}$ intersection
C’est l’intersection
Ensuite, on demande ni frère ni sœur, deux frères, etc




Et {Elèves} qui appartiennent à S ou a F ou aux deux
donne : $\boxed{S \cup F}$
C’est l’union

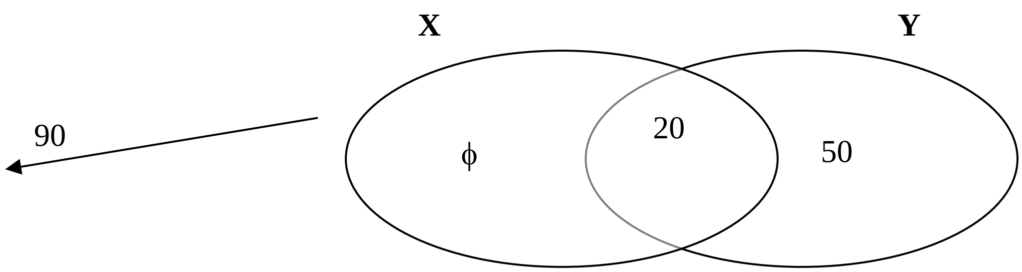
## *EXERCICE 2:*

Soient X et Y tels que
Card $(X \cap Y) = 20$
Card $(X \cup Y) = 90$

La proposition suivante est-elle V ou F ?

Card $X = 20$ et Card $Y = 70$

Elle est F, car si Card $X = 20$ alors




Et si Card $Y = 70$ alors on a Card $(X \cup Y) = 70 \neq 90$

## *EXERCICE 3 :*

Soient $E = \mathbb{R}$

$A = \{x : 1 \leq x \leq 3\}$
$B = \{x : 2 \leq x \leq y\}$

? $A \cup B$ / $A \cap \complement B$ / $\complement A \cap B$ etc…

**APPLICATION DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES A LA LOGIQUE**

Les assertions habituelles de la logique peuvent être symboliquement représentées dans l'algèbre des ensembles.

## *EXERCICE :*

S'il est vrai que « certains x ne sont pas des y » et que « tous les z sont des y », il résulte que :

a) certains x ne sont pas des z
b) certains x sont des z
c) certains z ne sont pas des x

*réponse* :
a) X est non inclus à Z
b) L'intersection de X et Z est non vide
c) Z est non inclus à X

Exemple concret :
X est l'ensemble des multiples de 2
Z est l'ensemble des multiples de 3

Certains multiples de 2 ne sont pas multiples de 3 ex :4
Certains multiples de 2 sont multiples de 3 ex :6
Certains multiples de 3 ne sont pas multiples de 2 ex :9

Diagramme de Venn [à venir]

## Référentiel et domaine de vérité (d'une condition)

Rappel :

On appelle *condition* à une ou plusieurs variables des expressions contenant une ou plusieurs variables et qui DEVIENNENT des propositions quand on substitue à ces variables des CONSTANTES « convenables ».

Ex : Condition : x est un nombre réel supérieur à 5.

- $x = 3$ : cela a un sens (mais la proposition est F)
- x= droite : la proposition obtenue n'a pas de sens.

L'ensemble des éléments x pour lesquels la condition a un sens est appelé REFERENTIEL de cette condition.

LE DOMAINE DE VERITE de la condition est le sous ensemble D de E tel que :

la condition est vraie $\forall x \in D$ et la condition est fausse $\forall\ x \notin D$

*Exercices* : (à faire après avoir donner la notion $\Rightarrow$)

| | | |
|---|---|---|
| Dans 3 | $x > 4 \Rightarrow x > 5$ | F |
| | $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ | F |
| dans 9 | $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ | F |
| dans ∠ | $x^2 \Rightarrow x = 5$ | V |

Rappel :

Le référentiel d'une condition c'est l'ensemble que parcourt la ou les variables tel qu'en remplaçant la variable par l'un de ses éléments, la condition devienne une proposition vraie.

*Exemple* : $x < 5$

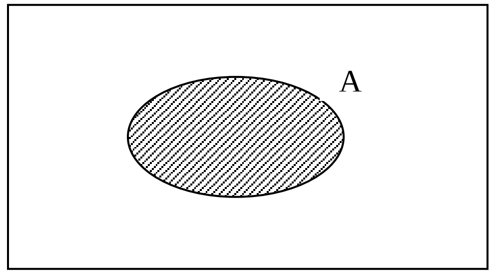
Si le référentiel est 3 :
Alors $D = ]-\infty, 5[$

Si le référentiel est ∠
Alors $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

# Synthèse : Négation/Conjonction/Disjonction/Implication

Soit Proposition p
Soit A = dom de vérité de p

***Non p (NEGATION)***

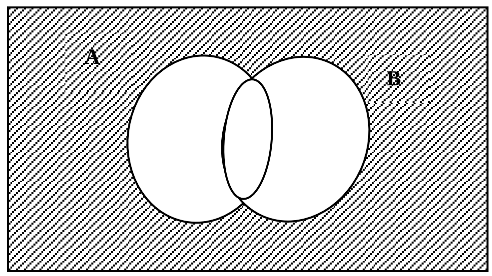



---

Soient Propositions p et q

Soit A = dom de vérité de p
Soit B = dom de vérité  de q

***p et q (CONJONCTION)***

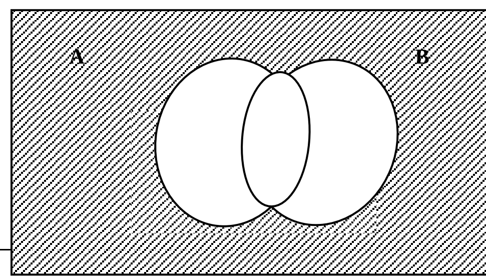



---

Soient Propositions p et q

Soit A = dom de vérité de p
Soit B = dom de vérité de q

***p ou q (DISJONCTION)***

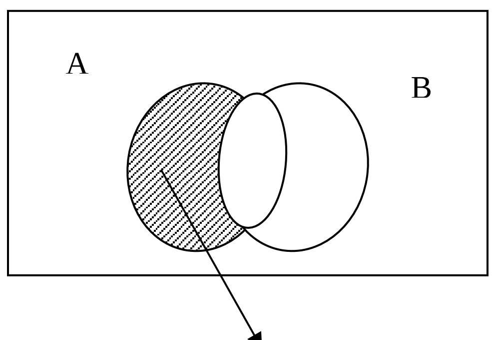



---

Soient Propositions p et q

Soit A = dom de vérité de p
Soit B = dom de vérité de  q

***p ⇒q (IMPLICATION)***




Région où antécédent V
Conséquent F

# Plus de détails…

Le calcul des propositions constitue la première étape vers la formalisation des démonstrations.
Il permet de s'assurer sans risque d'erreur que des déductions sont valides.

Le calcul des propositions peut être considéré comme un language comportant des lettres, des connecteurs pour les relier, et des parenthèses ouvrantes ou fermantes

Dans le calcul des propositions : on ne s'intéresse ni au contenu des propositions, ni aux raisons qui peuvent conduire à les considérer comme V ou F, mais aux relations existant entre elles.

## I. NEGATION d'une condition

*Exemples*

p : 2 + 2 = 4 q = non p : $2 + 2 \neq 4$

p : 7 est pair q = non p : 7 impair

Ces paires de PROPOSITIONS sont telles que si l'une à la valeur V, l'autre a la valeur F et réciproquement.

On dira :

La seconde est la négation de la première et réciproquement.

*Exemple* :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{p : x est un nombre pair} \\ \text{q = non p = x n'est pas un nombre pair} \end{array} \right.$

∃ une indéterminée ; il s'agit de deux CONDITIONS

Rappel :**PRINCIPE DU TIERS EXCLUS**
Si ça n'est pas vrai , c'est faux
Si ça n'est pas faux ,c'est vrai
Il n'y a pas d'autres possibilités

Une proposition est Vraie **ou** Fausse
Une proposition ne peut être Vraie **et** Fausse.

| p | Non p |
|---|---|
| V | F |

| F | V |
|---|---|

NB : Evident ! mais…….
Peut-on accepter un tel principe ?
Comment savoir si cela est toujours vrai ?
Certains mathématiciens ont cherché à se passer de ce principe.

Ce principe est utilisé dans certaines démonstrations mathématiques. En particulier, dans la démonstration par l'absurde.
*Exemple :* $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Pour s'assurer de quelque chose, un moyen consiste à prouver que le contraire n'a pas lieu. Cette technique de démonstration, dont la mise en pratique peut parfois dérouter, est extrêmement utile.

Résumons :
En mathématiques, on ne peut pas être une chose et son contraire.
Ainsi, lorsqu'on veut montrer que qcq chose est vrai, une première étape peut consister à montrer que son contraire est faux.
« première étape ? »
En existe-t-il une seconde ?
NON, à condition d'admettre LE PRINCIPE DU TIERS EXCLUS qui,comme son nom l'indique, pose qu'entre un énoncé et son contraire, il n'y a pas de troisième possibilité

Certains logiciens ont été gênés par le principe du tiers exclus, notamment ceux pour qui seule une construction effective d'un objet mathématique autorise à le considérer comme véritablement existant.
Pour eux, d'une certaine manière, LA NEGATION D'UNE NON EXISTENCE EST UNE PREUVE PAR DEFAUT

Soient A le domaine de la vérité de la condition p
B le domaine de la vérité de la condition p

## II. LA CONJONCTION de 2 conditions

p et q ➔domaine de vérité : $A \cap B$

C'est une nouvelle condition.
Elle est vraie dans chaque cas ou p et q sont vraies toutes les deux ; elle est fausse dans les autres cas.

*Exemple* : le système d'équations

$3x + 4y - 1 = 0$
$x - y = 0$

se traduit par la recherche de (x,y) telle que ce couple vérifie la conjonction $3x + y - 1 = 0$ et $x - y = 0$

NB : conjonction de deux conditions à deux indéterminées.

## III. LA DISJONCTION de 2 conditions

p ou q ➔domaine de vérité : $A \cup B$

C'est une nouvelle condition.
Elle est vraie dans chaque cas où l'une au moins des conditions p ou q est vraie.
Elle est fausse quand p et q sont fausses à la fois
.

## IV. L'IMPLICATION

$p \Rightarrow q$ signifie si p alors q
Elle est fausse dans chaque cas où p est V et q est F . Elle est vraie dans les autres cas.

Il y a lieu d'insister sur le fait que l'implication $p \Rightarrow q$ est V, dans le cas où l'antécédent est F.

Ecrire $p \Rightarrow q$ n'affirme pas automatiquement que p est V
Du faux peut impliquer du vrai
ETRANGE ! !

p :1+1=3 F
q : 2 est plus grand que 1 V
$p \Rightarrow q$

p : 3 divise 6 V
q : 7 est un nombre premier V
$p \Rightarrow q$

NB : p = antécédent
q = conséquent

1) si l'implication $p \Rightarrow q$ est toujours vraie

   alors $A \subset B$ et réciproquement

2) utilisation de l'implication

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p \Rightarrow$ V | q | V | Alors q est V<br>*p est une CS pour q* |
| $p \Rightarrow$ | q F | V | alors p est F<br>***il faut au moins que p soit vraie***<br>*q est une CN ~~(CS)~~ pour p* |

3) *Exemples*

♦ a, b ∈ 3 : [a = 0 ou b = 0] est une condition nécessaire et suffisante pour que a . b = 0

♦ A = ø ou B = ø est une condition suffisante pour que A ∩ B = ø  mais ce n'est pas une condition nécessaire.

COMMENTAIRES :
Le moteur de toute démonstration, c'est ce qui permet d'affirmer que quelque chose étant vrai, autre chose en découle nécessairement. Cette idée se formalise avec la notion d'implication, dont certains aspects contre-intuitifs ne doivent pas être négligés
En général, quand on dit quelque chose, c'est qu'on l'affirme comme vrai. Bien sur, il arrive qu'on dise des choses dont on est incertain de la véracité, ou même que l'on sait être fausse.
Le LOGICIEN, en revanche, ne s'intéresse pas à la véracité des hypothèses : pour lui, écrire « p implique q » n'affirme pas automatiquement que p est vraie, mais seulement que SI p est vraie, alors q aussi
« p implique q «  est l'affirmation logique que l'un des deux cas suivants(ou les deux) se produit :

1) q est V
2) P est F

Ce second cas est le plus étrange :Comment une hypothèse fausse peut-elle impliquer quoi que ce soit ?

## *EXERCICES :*

1) Implication logique sans indéterminée

---

| | | |
|---|---|---|
| p : 2 ≤ 3 | Vrai | |
| | | $p \Rightarrow q$  Vrai |
| q : 2 > 1 | Vrai | |

---

p : 3 est un nombre premier Faux

$p \Rightarrow q$ Vrai

q : 8 est un nombre premier Faux

---

p : 1 + 1 = 3 Faux

$p \Rightarrow q$ Vrai

q : 2 > 1 Vrai

---

p : 3 divise 6 Vrai

$p \Rightarrow q$ Vrai

q : 7 est un nombre premier Vrai

2) Cas où ∃ indéterminée

p : x > 3

$p \Rightarrow q$ Vrai

q : x > 1

---

p : $x \leq 3$

$p \Rightarrow q$ Vrai

q : x > 1

3) Condition nécessaire (CN) / Condition suffisante (CS)

♦ Compléter les phrases suivantes par « il faut », « il suffit » ou « il faut et il suffit ».

a) Pour qu'un quadrilatère soit carré, … qu'il soit un rectangle.
b) Pour qu'un triangle soit équilatéral, … qu'il ait deux angles de 60 degrés.
c) Pour qu'un rectangle soit un carré, … qu'il soit un losange.
d) Pour qu'un quadrilatère soit un losange, … qu'il soit un carré.
e) Pour qu'un parallélogramme soit un losange, … que ses diagonales soient perpendiculaires.
f) Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, … que ses diagonales se coupent en leur milieu.
g) Pour que la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un certain trajet soit supérieure à 90 km/h, … que sa vitesse instantanée ait été à un certain moment supérieure à 90 km/h.
h) Pour que la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un certain trajet soit supérieure à 90 km/h, … que sa vitesse instantanée ait été constamment supérieure à 90 km/h.

4) Implication/Conjonction/Disjonction

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si fausses, fournir un contre-*Exemple*.

a) **si** x est divisible par 4 et par 6
**alors** x est divisible par 24
réponse : F
contre-*Exemple* : $x = 12$

b) **si** x est impair
**alors** x est divisible par 3
réponse : F
contre-*Exemple* : $x = 5$

c) **si** 3 divise xy
**alors** 3 divise x et 3 divise y
réponse : F
contre-*Exemple* : $x = 3$ et $y = 7$
justification : $xy = 3 \times 7 = 21 \Rightarrow 3$ divise xy
3 divise 3
mais 3 ne divise pas 7

d) **si** 3 divise $(x+y)$
**alors** 3 divise x ou 3 divise y
réponse : F
contre-*Exemple* : $x = 8$ $y = 4$
justification : $x+y = 12$ mais 3 ne divise ni 8 ni 4

# Equivalence

Conjonction de deux implications réciproques.
$p \Leftrightarrow q$
p est une CNS pour q

*EXERCICE* :

Déterminer parmi les implications suivantes celles qui sont vraies et celles qui conduisent à une équivalence.

a) $2y - 7 = 5 \Rightarrow y = 6$
b) $a = 6$ et $b = 4 \Rightarrow ab = 24$
$x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x = 10$
c)
d) $x^2 = 4x + 5 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 5$

e) le quadrilatère ABCD est un rectangle $\Rightarrow$ le quadrilatère ABCD a ses diagonales égales

m et n sont deux nombres pairs $\Rightarrow$ (m+n) est un nombre pair

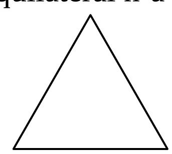
# Réciproque/Contraposée

a) Soit l'implication suivante :Si un triangle est rectangle, alors il n'a pas d'angles obtus.
Ecrire 1- la réciproque
2- la contraposée
3 - la réciproque de la contraposée
4 - la contraposée de la réciproque

Réponses :

1- si un triangle n'a pas d'angles obtus, alors il est un rectangle
Ce qui est faux

Ce triangle équilatéral n'a pas d'angles obtus et ce n'est pas un triangle rectangle



2- si un triangle a au moins un angle obtus
alors il n'est pas rectangle
3- si un triangle n'est pas rectangle alors il a au moins un angle obtus
4- cfr réponse 3

b) dans 3 :

$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ Vrai     Contraposée $x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$ Vrai
Réciproque $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ Faux

c) Si x est multiple de 4, alors $x^2$ l'est aussi, mais la réciproque est fausse.

La contraposée de la proposition $p \Rightarrow q$ est la proposition non $q \Rightarrow$ non p
Une proposition est toujours équivalente à sa contraposée.
Si l'une est vraie il en est de même pour l'autre
.
On a donc deux manières différentes d'exprimer la même vérité ! ! !

d) Si x est un nombre impair, alors $x^2$ est un nombre impair.
Cela est évident

Conséquence importante :
Si $x^2$ est pair (non impair), alors x est pair (non impair).
Ceci est moins évident à prouver.

# Négation d'une implication

**Si** x est un multiple de 2, **alors** x est un multiple de 4.
Ceci est une proposition fausse. En effet : contre-*Exemple* : x = 18

**Négation** : Il existe x multiple de 2 et x non multiple de 4.
Ceci est une proposition vraie.

Règle :

non [p ⇒ q] est [p  et non q]

# Lois de Morgan

Ces lois concernent la négation de la conjonction et de la disjonction.

*EXERCICES*

Soit p : x = y
q : k > 0

La négation de [p et q] est l'une des propositions ci-dessous.
Laquelle ?

a) (x ≠ y) et (k ≤ 0) càd non p et non q
b) (x ≠ y) ou (k ≤ 0) càd non p ou non q
((x = y) et (k ≤ 0)) ou ((x ≠ y) et (k > 0)) càd [p et non q] ou [non p et q

# Négation de propositions quantifiées

I. Négation utilisant UN quantificateur.

a) soit p une condition
soit la proposition $\forall x \in E$ : x vérifie p

négation : $\exists\, x \in E$ : x ne vérifie pas p

*Exemple* : E = {0,1,2,3,4}
p = être inférieur à 5   $\forall x \in E \quad x < 5$   Vrai

négation : $\exists\, x \in E : x \geq 5$ Faux

b) soit p une condition
soit la proposition $\exists\, x \in E$ : x vérifie p

*Exemple* : $\exists\, x \in E : x = 5$ Faux
négation : $\forall x \in E : x \neq 5$ Vrai

---

→ **Règle :**

1) remplacer le quantificateur $\forall$ par $\exists$ ($\exists$ par $\forall$)
2) remplacer par sa négation la condition intervenant dans la proposition.

c) Soit p : $\exists\, a \in ∠ : a < 0$ Faux
Non p : $\forall\, a \in ∠ \quad a \geq 0$ Vraie

d) Soit p : $\exists\, x \in 9 : x > 3$ Vrai
Non p : $\forall\, x \in 9 \quad x \leq 3$ Faux

## II. Négations utilisant les deux quantificateurs

a) $\forall\, x \in ∠ , \exists\, x' \in ∠ : x'+x = 0$

Cette proposition est fausse.
Contre-*Exemple* : $x = 3$ $\quad \nexists\, x' \in ∠ : x+x' = 0$

b) $A= \{2,3,4,5,6\}$
$\exists\, y \in A : \forall\, x \in A \quad y \leq x$ Vraie
négation $\forall\, y \in A, \exists\, x \in A : \quad y > x$ Fausse → justification : $y = 2$
$\nexists\, x : x<2$

c) $A = \{2,3,4,5,6\}$
$\exists\, y \in A : \forall\, x \in A \quad y < x$ Faux
négation : $\forall\, y \in A, \exists\, x \in A : \ y \geq x$ Vrai

**TAUTOLOGIE / ANTILOGIE**

Une tautologie est une combinaison de propositions qui est toujours vraie, quelle que soit la valeur des différentes propositions.

*Exemple* :

p : $x > 2$
q : $x > 1$
$p \Rightarrow q$ est vraie pour toute valeur de x, c'est donc une tautologie.

Une antilogie ou contradiction est une combinaison de propositions qui est toujours fausse, quelle que soit la valeur des différentes propositions.

*Exemple* :

p : $x > 5$
q : $x < 1$
p et q est fausse pour toute valeur de x, c'est donc une antilogie.

Remarque : on dira que deux propositions p et q sont logiquement équivalentes ssi la bi-implication $p \Leftrightarrow$ est une tautologie.

**SYLLOGISME**

Aristote définit ainsi cette notion « Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le fait de ces données «

Si de p on peut déduire q et si de q on peut déduire r, alors de p on peut déduire r.

Exemple :

$3x + 2 < 6 \quad \Rightarrow 3x < 6$
et
$3x < 6 \quad \Rightarrow x < 6$
donc
$3x + 2 < 6 \quad \Rightarrow x < 6$

Aristote s'est attelé à la tâche de fonder une sorte d' « arithméthique des propositions » , dans laquelle la vérité supposée de deux d'entre elles (les PREMISSES) entraîne celle de la troisième(la CONCLUSION) selon des modalités définies par différentes catégories de syllogismes.

Une structure syllogistique comprend donc :
Une proposition majeure, une proposition mineure et une conclusion
Les trois propositions consécutives d'un syllogisme rassemblent trois termes :un grand A, un moyen B, et un petit C

On peut donc obtenir potentiellement 64 syllogismes différents ;
toutefois outre que certains ainsi obtenus sont équivalents, tous ne sont pas concluants.
Voici un exemple de syllogisme non concluant :
Tout B est A
Quelque C est B
Tout C est A

Voici quatre exemples de syllogismes les plus immédiats :
(B est sujet dans la majeure et attribut dans la mineure)

1° tout B est A
2° tout C est B
DONC tout C est A

1°aucun B n'est A
2°tout C est B
DONC aucun C n'est A

1° tout B est A
2°quelque C est B
DONC quelque C est A

1°aucun B n'est A
2°quelque C est B
DONC quelque C n'est pas A

**EXERCICES DE SYNTHESE**

Voici 6 énoncés:

1- Si a = b, alors $\angle > 0$
2- Si a $\neq$ b, alors $\angle \leq 0$
3- Si $\angle \leq 0$, alors a $\neq$ b
4- $\angle > 0$ est une condition nécessaire pour que a et b soient égaux
5- a = b est une condition nécessaire pour que $\angle$ soit supérieur à 0
6- a = b est une condition suffisante pour que $\angle$ soit supérieur à 0

7- Pour que ∠ soit supérieur à 0, il faut que a et b soient égaux
8- Pour que ∠ soit supérieur à 0, il suffit que a ne soit pas différent de b

Une seule des affirmations suivantes est correcte. Laquelle?

a) 1- et 2- sont équivalents
b) 1-, 3-, 5- sont équivalents
c) 1-, 4-, 6-, 7- sont équivalents
d) 1-, 3-, 4-, 6-, 8- sont équivalents